

# Thermodynamique de sous-systèmes simples

## 3.1 Thermalisation de deux gaz séparés

Un système isolé est constitué de deux sous-systèmes fermés 1 et 2 séparés par une paroi diatherme imperméable. Initialement, ils sont maintenus à températures  $T_1^i$  et  $T_2^i$ . Le sous-système 1 contient  $N_1$  moles de gaz. L'énergie interne du gaz est donnée par  $U_1 = c_1 N_1 R T_1$ , où  $T_1$  est la température du gaz,  $R$  est une constante positive et  $c_1$  est un coefficient sans dimension. De manière similaire, il y a  $N_2$  moles de gaz dans le sous-système 2 et l'énergie interne du gaz est donnée par  $U_2 = c_2 N_2 R T_2$ .

- 1) Déterminer la variation d'énergie interne  $U_1$  due à la thermalisation.
- 2) Comparer la température initiale  $T_2^i$  du sous-système 2 et la température finale  $T_f$  du système si la taille du sous-système 2 est beaucoup plus grande que celle du sous-système 1.

### **3.1** Solution

Les circonstances spécifiées ici sont celles du sect. 3.2. Par conséquent, l'équilibre thermique est caractérisé par des températures égales pour les deux sous-systèmes. Comme le système est isolé, l'énergie totale  $U$  est conservée, ce qui signifie que la valeur initiale  $U_i$  de l'énergie interne totale est égale à la valeur finale  $U_f$ . Ainsi, on a,

$$U_i = c_1 N_1 R T_1^i + c_2 N_2 R T_2^i = c_1 N_1 R T_f + c_2 N_2 R T_f = U_f$$

ce qui implique que,

$$T_f = \frac{c_1 N_1 T_1^i + c_2 N_2 T_2^i}{c_1 N_1 + c_2 N_2}$$

- 1) La variation d'énergie interne s'écrit,

$$\Delta U_1 = c_1 N_1 R (T_f - T_1^i) = c_1 N_1 R \left( \frac{c_1 N_1 T_1^i + c_2 N_2 T_2^i}{c_1 N_1 + c_2 N_2} - T_1^i \right)$$

et peut être mise sous la forme suivante,

$$\Delta U_1 = R \left( \frac{1}{c_1 N_1} + \frac{1}{c_2 N_2} \right)^{-1} (T_2^i - T_1^i)$$

2) La température finale du système  $T_f$  peut s'écrire,

$$T_f = \frac{1}{1 + \frac{c_1}{c_2} \frac{N_1}{N_2}} \left( T_2^i + \frac{c_1}{c_2} \frac{N_1}{N_2} T_1^i \right)$$

Si le sous-système 2 est beaucoup plus grand que le sous-système 1, il contient beaucoup plus de gaz, i.e.  $N_1 \ll N_2$ . Dans cette limite, la température finale du système  $T_f$  est la température initiale  $T_2^i$  du sous-système 2,

$$T_f = T_2^i$$

Ainsi, la température  $T_2^i$  reste constante durant le processus de thermalisation. En d'autres termes, la température du grand sous-système 2 ne varie pas lorsqu'il est mis en contact avec le petit sous-système 1. On introduira formellement la notion de bain thermique au chapitre suivant (sect. 4.5.1).

### 3.2 Thermalisation de deux substances séparées

L'entropie  $S$  d'une substance particulière s'écrit en termes de son énergie interne  $U$  et du nombre de mole  $N$  comme,<sup>(1)</sup>

$$S(U, V, N) = NR \ln \left( 1 + \frac{U}{NE_0} \right) + \frac{RU}{E_0} \ln \left( 1 + \frac{NE_0}{U} \right)$$

où  $R$  et  $E_0$  sont des constantes positives. Un système est constitué de deux sous-systèmes contenant une telle substance, avec  $N_1$  moles dans le sous-système 1 et  $N_2$  moles dans le sous-système 2. Lorsqu'ils sont mis en contact thermique, leurs températures initiales sont  $T_1^i$  et  $T_2^i$ . Déterminer la température finale  $T_f$  du système.

#### 3.2 Solution

L'équilibre est caractérisé par des températures égales pour les deux sous-systèmes (sect. 3.2). On doit à présent déterminer l'expression de la température de cette substance. On a défini la température comme la dérivée partielle de l'énergie interne  $U$  par rapport à l'entropie  $S$ . En prenant l'inverse de cette relation, à l'aide de l'identité cyclique de dérivées partielles (sect. 4.7.2), on obtient,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{R}{E_0} \ln \left( 1 + \frac{NE_0}{U} \right)$$

<sup>(1)</sup> G. Carrington, *Basic Thermodynamics*, Oxford Science Publications (1994).

On en tire l'expression de l'énergie interne,

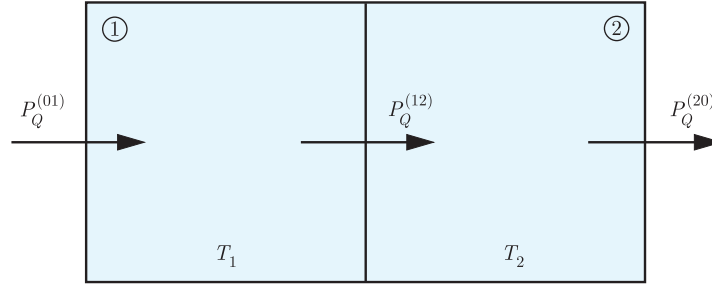
$$U = \frac{NE_0}{\exp\left(\frac{E_0}{RT}\right) - 1}$$

On applique la loi de conservation de l'énergie interne du système total (sect. 3.1), et on obtient,

$$\frac{E_0}{RT_f} = \ln \left( 1 + \left( \frac{\frac{N_1}{N_1 + N_2}}{\exp\left(\frac{E_0}{RT_1^i}\right) - 1} + \frac{\frac{N_2}{N_1 + N_2}}{\exp\left(\frac{E_0}{RT_2^i}\right) - 1} \right)^{-1} \right)$$

### 3.3 Transfert thermique stationnaire entre deux blocs

Un système formé de deux blocs, considérés comme des systèmes simples rigides, sont en contact thermique (fig. 3.1). Le bloc 1 est maintenu à une température  $T_1$  et le bloc 2 à une température  $T_2 < T_1$ . Un transfert de chaleur a lieu entre les blocs en régime stationnaire.



**Fig. 3.1** Un transfert thermique a lieu entre un bloc 1 à température  $T_1$  et un bloc 2 à température  $T_2$ .

On dénote  $P_Q^{(01)}$  le transfert de chaleur de l'environnement (libellé 0) vers le bloc 1,  $P_Q^{(12)}$  le transfert de chaleur du bloc 1 vers le bloc 2 et  $P_Q^{(20)}$  le transfert de chaleur du bloc 2 vers l'environnement.

En régime stationnaire, montrer que les puissance thermiques exercées par l'environnement sur le premier bloc, par le premier bloc sur le deuxième, et par le deuxième bloc sur l'environnement sont égales et écrites comme,

$$P_Q \equiv P_Q^{(01)} = P_Q^{(12)} = P_Q^{(20)}$$

**3.3 Solution**

En régime stationnaire, d'après la relation (2.20), l'entropie de chaque bloc est constante,

$$\dot{S}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}_2 = 0$$

Les blocs sont des systèmes simples. Par conséquent, le taux de production d'entropie (2.23) de chaque bloc est nul. Dans ce cas, la variation d'entropie (2.18) de chaque sous-système est donnée par,

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = \frac{P_Q^{(01)} - P_Q^{(12)}}{T_1(S_1)} = 0 & \Rightarrow P_Q^{(01)} = P_Q^{(12)} \\ \dot{S}_2 = \frac{P_Q^{(12)} - P_Q^{(20)}}{T_2(S_2)} = 0 & \Rightarrow P_Q^{(12)} = P_Q^{(20)} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_Q \equiv P_Q^{(01)} = P_Q^{(12)} = P_Q^{(20)}$$

**3.4 Thermalisation de deux blocs**

On considère un système formé de deux blocs métalliques homogènes libellés 1 et 2 qui peuvent être considérés comme des systèmes simples rigides. Ces blocs sont constitués de  $N_1$  et  $N_2$  moles de métal respectivement. Ils sont initialement séparés et ont des températures  $T_1$  et  $T_2$ . Lorsqu'ils sont mis en contact, ils atteignent progressivement l'équilibre thermique. La température finale du système est  $T_f$ . Le système peut être considéré comme isolé. L'énergie interne  $U_i$  du bloc  $i = 1, 2$  est une fonction de sa température  $T_i$  et du nombre  $N_i$  de moles de substance dans le bloc,

$$U_i = 3N_iRT_i$$

où  $R$  est une constante positive.

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système de deux blocs à l'équilibre thermique.
- 2) Calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  du système de deux blocs lors du processus qui l'amène à l'équilibre thermique.

**3.4 Solution**

- 1) Etant donné que le système est isolé, l'énergie interne est constante (1.30). Par conséquent, la variation d'énergie interne  $\Delta U$  du système est nulle,

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

La variation d'énergie interne de chaque bloc est donnée par,

$$\Delta U_1 = 3N_1 R \int_{T_1}^{T_f} dT = 3N_1 R (T_f - T_1)$$

$$\Delta U_2 = 3N_2 R \int_{T_2}^{T_f} dT = 3N_2 R (T_f - T_2)$$

Ainsi, on obtient l'expression de la température finale  $T_f$  du système,

$$T_f = \frac{N_1 T_1 + N_2 T_2}{N_1 + N_2}$$

2) La variation d'entropie  $\Delta S$  du système est exprimée comme,

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

La variation infinitésimale d'entropie de chaque bloc s'écrit,

$$dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} = 3N_1 R \frac{dT_1}{T_1}$$

$$dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} = 3N_2 R \frac{dT_2}{T_2}$$

ce qui implique que la variation d'entropie de chaque bloc du processus est de la forme,

$$\Delta S_1 = 3N_1 R \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = 3N_1 R \ln \left( \frac{T_f}{T_1} \right)$$

$$\Delta S_2 = 3N_2 R \int_{T_2}^{T_f} \frac{dT}{T} = 3N_2 R \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right)$$

Ainsi, la variation d'entropie lors du processus est donnée par,

$$\Delta S = 3N_1 R \ln \left( \frac{T_f}{T_1} \right) + 3N_2 R \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right)$$

### 3.5 Diffusion d'un gaz à travers une paroi perméable

On désire modéliser la diffusion d'un gaz constitué d'une seule substance à travers une paroi perméable diatherme. On considère un système isolé contenant  $N$  moles de gaz, formé de deux sous-systèmes de volumes identiques séparés par une paroi perméable rigide. Le gaz diffuse d'un sous-système à l'autre. Il y a  $N_1(t)$  moles de gaz dans le sous-système 1 et  $N_2(t)$  moles dans le sous-système 2. On modélise les potentiels chimiques en considérant qu'ils sont proportionnels à la quantité de substance :

$$\mu_1(N_1) = \frac{\ell}{FA} \frac{N_1}{2\tau}$$

$$\mu_2(N_2) = \frac{\ell}{FA} \frac{N_2}{2\tau}$$

où  $\tau > 0$  est un temps caractéristique de diffusion,  $F > 0$  le coefficient de diffusion de Fick et  $\ell > 0$  une longueur caractéristique. Initialement, il y a  $N_0$  moles dans le sous-système 1, i.e.  $N_1(0) = N_0$ , et  $N - N_0$  moles dans le sous-système 2, i.e.  $N_2(0) = N - N_0$ . Déterminer l'évolution du nombre de moles  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  dans les sous-systèmes 1 et 2. En déduire, le nombre de moles dans chaque sous-système à l'équilibre.

### **3.5** Solution

La quantité de gaz dans le système est égale à la somme de la quantité de gaz dans les deux sous-systèmes,

$$N = N_1(t) + N_2(t)$$

D'après l'équation de diffusion irréversible (3.45), le taux de variation  $\dot{N}_1$  du nombre de moles de gaz dans le sous-système 1 est donné par,

$$\dot{N}_1 = F \frac{A}{\ell} (\mu_2 - \mu_1) = \frac{1}{2\tau} (N_2(t) - N_1(t)) = -\frac{1}{\tau} \left( N_1(t) - \frac{N}{2} \right)$$

L'intégrale de cette équation d'évolution s'écrit formellement,

$$\int_{N_0}^{N_1(t)} \frac{dN'_1}{N'_1 - \frac{N}{2}} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt'$$

et le résultat de cette intégration est donné par,

$$\ln \left( \frac{N_1(t) - \frac{N}{2}}{N_0 - \frac{N}{2}} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

ce qui implique que,

$$N_1(t) = \frac{N}{2} + \left( N_0 - \frac{N}{2} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right)$$

et vu que  $N_2(t) = N - N_1(t)$ , on a,

$$N_2(t) = \frac{N}{2} + \left( \frac{N}{2} - N_0 \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right)$$

Ainsi, à l'équilibre, lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,

$$N_1(\infty) = N_2(\infty) = \frac{N}{2}$$

ce qui signifie qu'il y a la même quantité de gaz dans chaque sous-système. Par conséquent, à l'équilibre, le système est homogène.

### 3.6 Amortissement mécanique par transfert de chaleur

Un système isolé de volume  $V$  est constitué de deux sous-systèmes, notés 1 et 2, séparés par une paroi imperméable, diatherme et mobile de masse  $M$  et de volume négligeable. Les deux sous-systèmes sont à l'équilibre thermique à température  $T$ . Ils sont constitués chacun de  $N$  moles de gaz parfait, ce qui signifie que la pression  $p_i$  du gaz dans le sous-système  $i$ , son volume  $V_i$ , le nombre de moles  $N$  et la température  $T$  sont liés par l'équation  $p_i V_i = NRT$  où  $R$  est une constante positive (sect. 5.6). La masse du gaz est négligeable par rapport à la masse de la paroi et l'énergie interne de la paroi est négligeable par rapport à celle du gaz. Initialement, le système n'est pas à l'équilibre mécanique. On considère que la variation de volume  $\Delta V$  entre le volume  $V_i$  de chaque sous-système et son volume  $V_0$  à l'équilibre mécanique est petite, i.e.  $\Delta V \ll V_0$ .

- 1) Exprimer la puissance dissipée  $T\Pi_S$  en termes de la variation de pression entre les sous-systèmes  $p_1 - p_2$  et des dérivées temporelles du volume  $V_1$  du sous-système 1.
- 2) Déterminer l'équation d'évolution du volume  $V_1$  du sous-systèmes 1 à l'aide de la condition d'évolution du deuxième principe.
- 3) Compte tenu du fait que les sous-systèmes sont constitués d'un gaz parfait, à l'aide d'un développement limité au premier ordre en  $\Delta V/V_0$ , montrer que l'équation du mouvement de la paroi est celle d'un oscillateur harmonique amorti,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où  $x$  est la coordonnée du déplacement de la paroi par rapport à la position d'équilibre. Déterminer l'expression du coefficient de frottement  $\gamma$  et de la pulsation  $\omega_0$  des oscillations non-amorties.

- 4) En régime d'amortissement faible, i.e.  $\gamma < \omega_0$ , déterminer la période  $T$  des oscillations amorties.

#### 3.6 Solution

- 1) Comme la masse du gaz est négligeable par rapport à la masse de la paroi, que le volume de la paroi est négligeable par rapport au volume du gaz et que l'énergie interne de la paroi est négligeable par rapport à celle du gaz, l'énergie du système est la somme de l'énergie cinétique de la paroi de masse  $M$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , et des énergies internes  $U_1$  et  $U_2$  du gaz dans les deux-sous-systèmes,

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + U_1 + U_2$$

La dérivée temporelle de l'énergie interne s'écrit,

$$\dot{E} = M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

Comme la paroi est imperméable, le nombre de moles de gaz  $N$  dans chaque sous-système est constant. De plus, le système est à l'équilibre thermique

à température  $T$ . Ainsi, compte tenu de la relation (2.12), les dérivées temporelles de l'énergie interne de chaque sous-système s'écrivent,

$$\dot{U}_1 = T \dot{S}_1 - p_1 \dot{V}_1 \quad \text{et} \quad \dot{U}_2 = T \dot{S}_2 - p_2 \dot{V}_2$$

Comme le système est isolé, l'énergie  $E$  est constante d'après le premier principe (1.9). Ainsi, la dérivée temporelle de l'énergie s'annule,

$$\dot{E} = T (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) - p_1 \dot{V}_1 - p_2 \dot{V}_2 + M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$$

De plus, il n'y a pas d'échange d'entropie avec l'environnement. Par conséquent, compte tenu du deuxième principe (2.1) et de l'extensivité de l'entropie (3.2),

$$T (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) = T \dot{S} = T \Pi_S$$

Ainsi, on obtient une expression pour la puissance dissipée qui s'écrit comme le produit de la température et du taux de production d'entropie  $\Pi_S$ ,

$$T \Pi_S = p_1 \dot{V}_1 + p_2 \dot{V}_2 - M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

Comme le système est isolé, son volume  $V$  est constant. On déduit alors la condition suivante,

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0 \quad \text{ainsi} \quad \dot{V}_2 = -\dot{V}_1$$

On définit l'orientation positive du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  de la paroi lorsque son mouvement accroît le volume  $V_1$  du sous système 1, i.e.  $\dot{V}_1 > 0$ . En introduisant alors un vecteur surface de la paroi  $\mathbf{A} = \mathbf{cste}$  colinéaire au vecteur vitesse et dont la norme correspond à l'aire  $A$  de la surface de la paroi, on obtient les conditions suivantes,

$$\dot{V}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad \text{et ainsi} \quad \ddot{V}_1 = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A}$$

ce qui implique que,

$$M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{M}{A^2} \dot{V}_1 \ddot{V}_1$$

Par conséquent, la puissance dissipée devient,

$$T \Pi_S = \left( (p_1 - p_2) - \frac{M}{A^2} \ddot{V}_1 \right) \dot{V}_1$$

- 2) D'après le deuxième principe appliqué au déplacement de la paroi interne d'un système constituée de deux sous-système, les équations (3.30) et (3.31) impliquent que la puissance dissipée est une forme quadratique du taux de variation du volume du sous-système 1,

$$T \Pi_S = \xi \dot{V}_1^2$$

où  $\xi > 0$  est le coefficient de frottement thermoélastique. En identifiant les deux expressions de la puissance dissipée  $T \Pi_S$  et en divisant le résultat



par  $\dot{V}_1$ , on obtient une expression de la différence de pression entre les sous-systèmes en termes de  $\dot{V}_1$  et de  $\ddot{V}_1$ ,

$$p_1 - p_2 = \frac{M}{A^2} \ddot{V}_1 + \xi \dot{V}_1$$

- 3) Comme il y a  $N$  moles de gaz dans chaque sous-système, le volume  $V_0$  de chaque sous-système à l'équilibre sera la moitié du volume  $V$  du système. Ainsi, dans la limite d'un petit déplacement autour de la position d'équilibre,

$$V_1 = V_0 + \Delta V \quad \text{et} \quad V_2 = V_0 - \Delta V$$

où  $V_0 = V/2$  et  $\Delta V \ll V_0$ . Comme il y a  $N$  moles de gaz parfait à température  $T$  dans chaque sous-système, en faisant un développement limité au premier ordre en  $\Delta V/V_0$ , on obtient,

$$p_1 = \frac{NRT}{V_1} = \frac{NRT}{V_0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta V}{V_0}} \simeq \frac{NRT}{V_0} \left( 1 - \frac{\Delta V}{V_0} \right)$$

$$p_2 = \frac{NRT}{V_2} = \frac{NRT}{V_0} \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V_0}} \simeq \frac{NRT}{V_0} \left( 1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right)$$

Par conséquent, dans cette limite,

$$p_1 - p_2 = - \frac{2NRT}{V_0^2} \Delta V = - \frac{8NRT}{V^2} \Delta V$$

La variation de volume  $\Delta V$  est le produit de l'aire  $A$  de la surface de la paroi et du déplacement  $x$  de la paroi par rapport à la position d'équilibre. Ainsi compte tenu du fait que  $V_0 = \text{cste}$ ,

$$\Delta V = A x \quad \text{ainsi} \quad \dot{V}_1 = A \dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{V}_1 = A \ddot{x}$$

A l'aide de ces relations, l'équation du mouvement obtenue au point 2) multipliée par  $A^3/M$  devient,

$$\ddot{x} + \frac{\xi A^2}{M} \dot{x} + \frac{8 A^2 NRT}{M V^2} x = 0$$

Cette équation décrit le mouvement d'un oscillateur harmonique amorti qui peut être mise sous la forme,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où le coefficient de frottement est donné par,

$$\gamma = \frac{\xi A^2}{2M}$$

et la pulsation des oscillations non-amorties s'écrit,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8 A^2 NRT}{M V^2}}$$

En régime d'amortissement faible,  $\gamma < \omega_0$ , la pulsation des oscillations non-amorties est donnée par,<sup>(2)</sup>

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{A}{2MV} \sqrt{32MNR T - \xi^2 A^2 V^2}$$

La période des oscillations amorties est alors,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi MV}{A} \frac{1}{\sqrt{32MNR T - \xi^2 A^2 V^2}}$$

L'équation du mouvement oscillatoire amorti rend compte de l'amortissement viscoélastique décrit en rhéologie par le modèle de **Zener**.<sup>(3)</sup>

### 3.7 Production d'entropie par thermalisation

Dans le problème résolu 3.4 traitant de la thermalisation de deux blocs, montrer que dans le cas particulier où  $N_1 = N_2 = N$  la variation d'entropie,

$$\Delta S = 3N_1 R \ln \left( \frac{T_f}{T_1} \right) + 3N_2 R \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right)$$

est strictement positive.

#### **3.7** Solution

Dans le cas particulier où  $N_1 = N_2 = N$ , la température finale est donnée par,

$$T_f = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$$

ce qui implique que la variation d'entropie peut être mise sous la forme,

$$\Delta S = 3NR \ln \left( \frac{T_f^2}{T_1 T_2} \right) = 3NR \ln \left( \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \right)$$

Comme les température initiales  $T_1$  et  $T_2$  sont différentes, compte tenu de l'identité,

$$(T_1 - T_2)^2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2 > 0 \quad \text{et ainsi} \quad T_1^2 + T_2^2 > 2T_1 T_2$$

la variation d'entropie est strictement positive,

$$\Delta S > 3NR \ln \left( \frac{4T_1 T_2}{4T_1 T_2} \right) = 0$$

comme cela devrait être le cas pour un processus irréversible.

<sup>(2)</sup> J.-Ph. Ansermet, *Mécanique*, Traité de physique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2013, sect. 2.5.

<sup>(3)</sup> Clarence Zener, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, The University of Chicago Press, Chicago, 1948.

### 3.8 Production d'entropie par transfert de chaleur

Un système isolé est constitué des deux sous-systèmes, notés 1 and 2, analysés dans le problème résolu 3.3. En utilisant le deuxième principe (2.2), montrer que dans un état stationnaire où  $T_1 > T_2$ , le taux de production d'entropie  $\Pi_S$  est positif lors d'un transfert de chaleur à travers les deux sous-systèmes malgré le fait que, d'après l'équation (2.23),  $\Pi_{S_1} = \Pi_{S_2} = 0$ .

#### 3.8 Solution

On rappelle ici que le taux de production d'entropie d'un système ne peut pas simplement être obtenu en sommant les taux de production d'entropie de chaque sous-système (3.14). Le système est dans un état stationnaire, ce qui implique que la dérivée temporelle de l'entropie s'annule, i.e.  $\dot{S} = 0$ . Ainsi, d'après le deuxième principe (2.2), le taux de production d'entropie est égal à l'opposé du taux d'échange d'entropie, i.e.

$$\dot{S} = I_S + \Pi_S = 0 \quad \text{et ainsi} \quad \Pi_S = -I_S$$

Le taux d'échange d'entropie  $I_S$  est la somme du taux d'entropie  $P_Q^{(01)}/T_1$  sortant de l'environnement 0 et entrant dans le sous-système 1 et du taux d'entropie  $-P_Q^{(20)}/T_2$  sortant du sous-système 2 et entrant dans l'environnement 0, où le signe moins caractérise une perte d'entropie. Ainsi, on obtient,

$$\Pi_S = \frac{P_Q^{(20)}}{T_2} - \frac{P_Q^{(01)}}{T_1}$$

Etant donné que  $T_1 > T_2$ , le transfert de chaleur a lieu du sous-système 1 vers le sous-système 2, ainsi  $P_Q^{(12)} > 0$ . Pour un transfert de chaleur stationnaire, les puissances thermiques satisfont l'identité  $P_Q^{(01)} = P_Q^{(12)} = P_Q^{(20)}$ . Par conséquent,

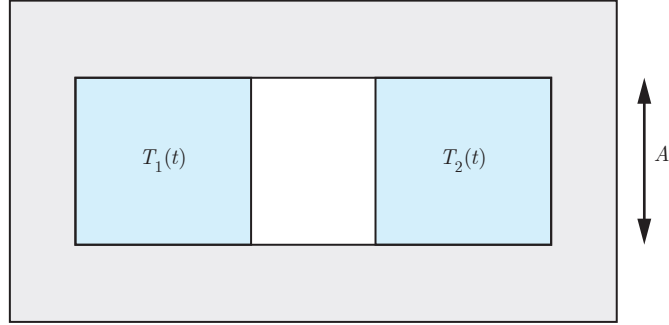
$$\Pi_S = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) P_Q^{(12)} > 0$$

### 3.9 Thermalisation par radiation

Un système isolé est constitué de deux blocs de même substance (fig. 3.2). Les énergies internes des blocs 1 et 2 sont  $U_1 = C_1 T_1$  et  $U_2 = C_2 T_2$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes positives. Deux côtés des blocs se font exactement face. La surface de chaque côté est  $A$  et ils sont séparés par une couche d'air. On néglige la conductivité thermique de l'air. La puissance thermique radiative que chaque bloc  $i$  exerce sur le bloc  $j$ , où  $i, j = 1, 2$ , s'écrit,

$$P_Q^{(ij)} = \sigma A \left( T_i(t)^4 - T_j(t)^4 \right)$$

où  $\sigma$  est un coefficient constant.



**Fig. 3.2** Deux blocs formés du même matériau sont séparés par une couche d'air. La convection et la conduction thermique à travers la couche d'air sont négligeables. Les blocs atteignent un état d'équilibre thermique dû au transfert de chaleur par radiation.

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système lorsqu'il atteint l'équilibre.
- 2) Etablir l'équation d'évolution temporelle pour  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$ .
- 3) Considérer le cas particulier où  $C_1 = C_2 = C$  dans la limite de faibles variations de température, i.e.  $T_1(t) = T_f + \Delta T_1(t)$  et  $T_2(t) = T_f + \Delta T_2(t)$  avec  $\Delta T_1(t) \ll T_f$  et  $\Delta T_2(t) \ll T_f$  en tout temps. Montrer que la différence de température  $\Delta T(t) = \Delta T_1(t) - \Delta T_2(t)$  décroît exponentiellement.

### **[3.9] Solution**

- 1) Compte tenu du premier principe appliqué au système isolé, i.e.  $U = U_1 + U_2 = 0 = \text{cste}$ , on obtient la température finale à l'équilibre,

$$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$$

- 2) Le premier principe appliqué à chaque sous-système s'écrit,

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= C_1 \dot{T}_1 = P_Q^{(21)} = \sigma A (T_2^4 - T_1^4) \\ \dot{U}_2 &= C_2 \dot{T}_2 = P_Q^{(12)} = \sigma A (T_1^4 - T_2^4)\end{aligned}$$

Ainsi, les équations d'évolution temporelle sont données par,

$$\dot{T}_1 = \frac{\sigma A}{C_1} (T_2^4 - T_1^4) \quad \text{et} \quad \dot{T}_2 = \frac{\sigma A}{C_2} (T_1^4 - T_2^4)$$

- 3) Dans le cas où  $C_1 = C_2 = C$ , les dérivées temporelles des variations de température s'écrivent,

$$\begin{aligned}\Delta \dot{T}_1 &= \frac{\sigma A}{C} \left( (T_f + \Delta T_2)^4 - (T_f + \Delta T_1)^4 \right) \\ \Delta \dot{T}_2 &= \frac{\sigma A}{C} \left( (T_f + \Delta T_1)^4 - (T_f + \Delta T_2)^4 \right)\end{aligned}$$

Dans la limite où  $\Delta T_1 \ll T_f$  and  $\Delta T_2 \ll T_f$ , ces résultats se réduisent à,

$$\begin{aligned}\Delta \dot{T}_1 &= \frac{4\sigma A}{C} T_f^3 (\Delta T_2 - \Delta T_1) \\ \Delta \dot{T}_2 &= \frac{4\sigma A}{C} T_f^3 (\Delta T_1 - \Delta T_2)\end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient,

$$\Delta \dot{T} = \frac{8\sigma A}{C} T_f^3 \Delta T$$

où  $\Delta T = \Delta T_1 - \Delta T_2$ . Après intégration, on obtient,

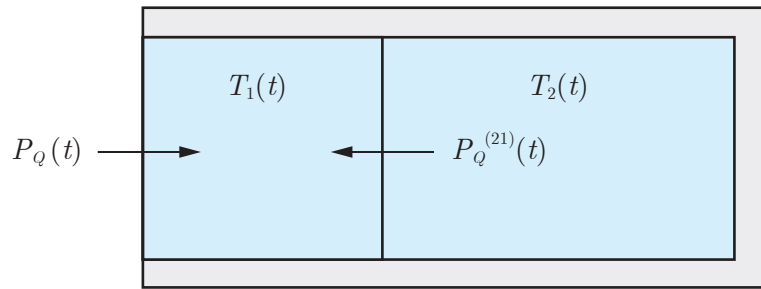
$$\Delta T(t) = \Delta T(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où  $\Delta T(0) = T_1(0) - T_2(0)$  et le temps d'amortissement  $\tau$  est,

$$\tau = \frac{C}{8\sigma A T_f^3}$$

### 3.10 Isolation thermique

On modélise un bâtiment et son isolation comme deux sous-systèmes simples dénotés 1 et 2. L'état de chaque sous-système est caractérisé par sa température. Le sous-système 1 représente l'isolation. Le sous-système 2 représente le reste du bâtiment pour lequel il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'environnement. Le transfert irréversible de chaleur entre le sous-système 2 et le sous-système 1 est décrit par la puissance thermique  $P_Q^{(21)}(t)$ .



**Fig. 3.3** Le sous-système 1 représente l'isolation et le sous-système 2 représente le reste du bâtiment. Le transfert de chaleur entre l'environnement et le sous-système 1 est décrit par la puissance thermique  $P_Q(t)$ . Le transfert de chaleur du sous-système 2 au sous-système 1 est décrit par la puissance thermique  $P_Q^{(21)}(t)$ . Il n'y a pas de transfert de chaleur direct entre l'environnement et le sous-système 2, ce qui est représenté par la paroi adiabatique entourant le système à l'exception de la partie du sous-système 1 qui est exposée à l'environnement.

Le sous-système 2 échange de la chaleur uniquement avec le sous-système 1 à travers une paroi diatherme de surface  $A$ , d'épaisseur  $\ell$  et de conductivité thermique  $\kappa$ . Cela est représenté sur la figure par une paroi adiabatique entourant tout le système, à l'exception d'une partie du sous-système 1 qui est exposée au transfert réversible de chaleur avec l'environnement. Ce transfert de chaleur est décrit par la puissance thermique  $P_Q(t)$ . Le sous-système 1 a une température  $T_1(t)$ , sa chaleur spécifique constante est  $C_1$  et son énergie interne  $U_1$  s'écrit,

$$U_1 = C_1 T_1$$

Le sous-système 2 a une température  $T_2$ , sa chaleur spécifique constante est  $C_2$  et son énergie interne s'écrit,

$$U_2 = C_2 T_2$$

Le sous-système 1 est soumis à un transfert de chaleur périodique décrit par la puissance  $P_Q(t)$ . Pour simplifier les calculs, on écrit la puissance thermique  $P_Q(t)$  sous la forme d'une fonction complexe,

$$P_Q(t) = P_0 \exp(i\omega t)$$

de période,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

qui correspond typiquement à une journée. Sur le plan phénoménologique, c'est la partie réelle de la puissance  $P_Q(t)$  qui décrit l'échange de chaleur entre l'environnement et le sous-système 1. Sous l'effet du transfert de chaleur périodique avec l'environnement, le système passe d'abord par une phase transitoire puis atteint une phase périodique, appelé régime harmonique, où les évolutions temporelles des températures complexes  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  des deux sous-systèmes sont des oscillations périodiques autour d'une température réelle  $T_0$  de même période que la puissance thermique  $P_Q(t)$ . Ainsi,

$$T_1(t) = \Delta T_1 \exp(i\omega t) + T_0 = |\Delta T_1| \exp(i\phi_1(t)) \exp(i\omega t) + T_0$$

$$T_2(t) = \Delta T_2 \exp(i\omega t) + T_0 = |\Delta T_2| \exp(i\phi_2(t)) \exp(i\omega t) + T_0$$

où  $|\Delta T_1|$  et  $|\Delta T_2|$  sont les modules constants des amplitudes complexes des oscillations de température  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  et  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les angles de déphasage de ces oscillations dans le plan complexe. Sur le plan phénoménologique, ce sont les parties réelles des températures complexes  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  qui représentent les températures physiques des deux sous-systèmes.

- 1) Pour une puissance thermique  $P_Q$  quelconque, déterminer le système d'équation différentielles couplées qui décrit l'évolution des températures  $T_1$  et  $T_2$  des deux sous-systèmes.
- 2) Dans le cas particulier où il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'environnement, i.e.  $P_Q = 0$ , déterminer explicitement l'évolution temporelle de la différence de température  $T_2 - T_1$ .

- 3) Dans le cas particulier où il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'environnement, i.e.  $P_Q = 0$ , déterminer le taux de production d'entropie  $\Pi_S$ .
- 4) Dans le régime harmonique dû au transfert de chaleur périodique avec l'environnement, en écrivant le système d'équations d'évolution couplées sous forme matricielle, en déduire le module du rapport des amplitudes complexes des oscillations de température  $|\Delta T_2/\Delta T_1|$  et l'angle de déphasage  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  entre ces amplitudes complexes  $\Delta T_2$  et  $\Delta T_1$ .

### 3.10 Solution

- 1) En appliquant le premier principe (1.29) aux deux sous-systèmes en absence d'action mécanique, i.e.  $P_W = 0$ , compte tenu du fait que le transfert de chaleur vers le sous-système 1 est décrit par la somme de la puissance thermique  $P_Q$  exercée par l'environnement et la puissance thermique  $P_Q^{(21)}$  exercée par le sous-système 2, et le transfert de chaleur vers le sous-système 2 est décrit par la puissance thermique  $P_Q^{(12)}$  exercée sur le sous-système 1, les dérivées temporelles des énergies internes des deux sous-systèmes s'écrivent,

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= C_1 \dot{T}_1 = P_Q + P_Q^{(21)} \\ \dot{U}_2 &= C_2 \dot{T}_2 = P_Q^{(12)}\end{aligned}$$

Compte tenu de la loi de Fourier discrète (3.16), les puissances thermiques décrivant le transfert de chaleur à travers la paroi diatherme de surface  $A$ , d'épaisseur  $\ell$  et de conductivité thermique  $\kappa$  entre les deux sous-systèmes s'écrivent,

$$P_Q^{(12)} = -P_Q^{(21)} = -\kappa \frac{A}{\ell} (T_2 - T_1)$$

Par conséquent, le système d'équations couplées décrivant l'évolution des températures s'écrit,

$$\begin{aligned}\dot{T}_1 &= \frac{P_Q}{C_1} + \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} (T_2 - T_1) \\ \dot{T}_2 &= -\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} (T_2 - T_1)\end{aligned}$$

- 2) En absence de transfert de chaleur périodique avec l'environnement, i.e.  $P_Q = 0$ , la différence entre les deux équations d'évolution des températures s'écrit,

$$\dot{T}_2 - \dot{T}_1 = -\kappa \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{A}{\ell} (T_2 - T_1)$$

En multipliant cette équation différentielle par l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$  et en la divisant par la différence de température  $T_2 - T_1$ , on obtient,

$$\frac{d(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1} = -\kappa \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{A}{\ell} dt$$

En définissant le temps d'amortissement comme,

$$\tau = \frac{\ell}{\kappa A} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

l'intégrale de l'équation différentielle de  $t' = 0$  à  $t' = t$  s'écrit,

$$\int_{T_2(0) - T_1(0)}^{T_2(t) - T_1(t)} \frac{d(T_2(t') - T_1(t'))}{T_2(t') - T_1(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt'$$

et le résultat de cette intégrale est donné par,

$$\ln \left( \frac{T_2(t) - T_1(t)}{T_2(0) - T_1(0)} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

L'exponentielle de ce résultat donne l'évolution de la différence de température entre les deux sous-systèmes,

$$T_2(t) - T_1(t) = (T_2(0) - T_1(0)) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right)$$

Ainsi, en absence de transfert de chaleur avec l'environnement, la différence de température entre les sous-systèmes  $T_2(t) - T_1(t)$  décroît exponentiellement au cours du temps.

- 3) Compte tenu de la relation de Gibbs (2.12) et de l'équation d'évolution (2.14) appliquée à chaque sous-système fermé de volume constant en absence d'action mécanique, i.e.  $P_W = 0$ , la dérivée temporelle de l'entropie de chaque sous-système s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \frac{1}{T_1} \dot{U}_1 = \frac{P_Q^{(21)}}{T_1} = \kappa \frac{A}{\ell} \frac{T_2 - T_1}{T_1} \\ \dot{S}_2 &= \frac{1}{T_2} \dot{U}_2 = \frac{P_Q^{(12)}}{T_2} = -\kappa \frac{A}{\ell} \frac{T_2 - T_1}{T_2} \end{aligned}$$

Compte tenu du deuxième principe (2.1) pour un système adiabatiquement fermé et de l'extensivité de l'entropie (3.2), le taux de production d'entropie est donné par,

$$\Pi_S = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \kappa \frac{A}{\ell} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) (T_2 - T_1) = \kappa \frac{A}{\ell} \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2} \geq 0$$

- 4) Vu que les températures complexes des deux sous-systèmes s'écrivent,

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \Delta T_1 \exp(i\omega t) + T_0 \\ T_2(t) &= \Delta T_2 \exp(i\omega t) + T_0 \end{aligned}$$

leurs dérivées temporelles sont données par,

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(t) &= i\omega \Delta T_1 \exp(i\omega t) \\ \dot{T}_2(t) &= i\omega \Delta T_2 \exp(i\omega t) \end{aligned}$$



Compte tenu de l'expression de la puissance thermique périodique complexe,

$$P_Q(t) = P_0 \exp(i\omega t)$$

le système d'équations couplées décrivant l'évolution des températures devient,

$$\begin{aligned} i\omega \Delta T_1 \exp(i\omega t) &= \frac{P_0}{C_1} \exp(i\omega t) + \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} (\Delta T_2 - \Delta T_1) \exp(i\omega t) \\ i\omega \Delta T_2 \exp(i\omega t) &= -\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} (\Delta T_2 - \Delta T_1) \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

En divisant ce système par le nombre complexe  $\exp(i\omega t)$ , on peut le mettre sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} \left(i\omega + \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell}\right) \Delta T_1 - \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} \Delta T_2 &= \frac{P_0}{C_1} \\ -\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} \Delta T_1 + \left(i\omega + \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}\right) \Delta T_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ces système d'équations couplées peut être écrit sous forme matricelle,

$$\begin{pmatrix} i\omega + \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} & -\frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} \\ -\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} & i\omega + \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice carrée de dimension 2 s'écrit,

$$\left(i\omega + \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell}\right) \left(i\omega + \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}\right) - \frac{\kappa^2}{C_1 C_2} \frac{A^2}{\ell^2} = -\omega^2 + i\omega\kappa \frac{A}{\ell} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

L'inverse du système matriciel s'écrit alors,

$$\begin{pmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\kappa \frac{A}{\ell} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \begin{pmatrix} i\omega + \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} & \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} \\ \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell} & i\omega + \frac{\kappa}{C_1} \frac{A}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les amplitudes complexes des oscillations de température s'écrivent,

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= \frac{i\omega + \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}}{-\omega^2 + i\omega\kappa \frac{A}{\ell} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} P_0 \\ \Delta T_2 &= \frac{\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}}{-\omega^2 + i\omega\kappa \frac{A}{\ell} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} P_0 \end{aligned}$$

Le rapport des amplitudes complexes des oscillations de température est donné par,

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{i\omega + \frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}}{\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}}$$

Le module de ce rapport est donné par,

$$\left| \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2 + \frac{\kappa^2}{C_2^2} \frac{A^2}{\ell^2}}}{\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}} = \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \ell^2}{\kappa^2 A^2} C_2^2} > 1$$

Ainsi, l'amplitudes des oscillations de température est plus forte dans le sous-système 1 que dans le sous-système 2. Cela signifie que l'isolation amortit les fluctuations de la température à l'intérieur du bâtiment, comme on le comprend intuitivement. Le rapport des amplitudes complexes des oscillations de température s'écrit en termes des angles de déphasage de ces oscillations dans le plan complexe comme,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} &= \frac{|\Delta T_1|}{|\Delta T_2|} \frac{e^{i\phi_1}}{e^{i\phi_2}} = \left| \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right| e^{i(\phi_1 - \phi_2)} = \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \ell^2}{\kappa^2 A^2} C_2^2} e^{i\Delta\phi} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \ell^2}{\kappa^2 A^2} C_2^2} \left( \cos(\Delta\phi) + i \sin(\Delta\phi) \right) \end{aligned}$$

Les parties réelle et imaginaire de ce rapport s'écrivent,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right) &= \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \ell^2}{\kappa^2 A^2} C_2^2} \cos(\Delta\phi) = \frac{\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}}{\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}} = 1 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right) &= \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \ell^2}{\kappa^2 A^2} C_2^2} \sin(\Delta\phi) = \frac{\omega}{\frac{\kappa}{C_2} \frac{A}{\ell}} = \frac{\omega \ell}{\kappa A} C_2 \end{aligned}$$

La tangente de l'angle de déphasage  $\Delta\phi$  s'écrit,

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{\sin(\Delta\phi)}{\cos(\Delta\phi)} = \frac{\omega \ell}{\kappa A} C_2$$

Ainsi l'angle de déphasage est donné par,

$$\Delta\phi = \arctan \left( \frac{\omega \ell}{\kappa A} C_2 \right)$$